广义拉格朗日乘子 MHD 方程组的两类逆风分裂格式*

张璟珂 [1,2] 李会超 [1,2]

1（中国科学院空间科学与应用研究中心 空间天气学国家重点实验室 北京 100190）

2（中国科学院大学 北京 100049）

摘要 开发高性能的磁流体力学数值模拟方法是提高空间天气数值预报研究的一个重要方面。有限体积法的逆风分裂格式具有良好的间断捕获能力，Steger-Warming 和 AUSM（Advection Upstream Splitting Method）格式是逆风分裂格式的 FVS（Flux Vector Splitting）方法中有代表性的两种格式。本文采用这两种格式求解具有伽利略不变性的扩展型广义拉格朗日乘子磁流体力学（EGLM-MHD）方程组，对 Orszag-Tang 涡流问题和三维爆炸波问题进行了数值模拟。结果表明两种格式均能得到稳定精确的数值结果。与 Steger-Warming 格式相比，AUSM 格式产生的磁场散度误差更小，计算速度更快。

关键词 磁流体力学数值模拟，Steger-Warming 格式，AUSM 格式，EGLM-MHD

中国分类号 P 353

Two Upstream Splitting Schemes for GLM-MHD

ZHANG Jingke[1,2] LI Huichao[1,2]

1(State Key Laboratory of Space Weather,Center for Space Science and Applied Research, China Academy of Sciences, Beijing 100190)

2(University of Chinese Academy of Sciences，Beijing 100049)

Abstract Developing a high performance MHD numerical simulation method is an important factor in research of numerical prediction of space weather. Upwind flux splitting scheme based on finite volume method has good ability to capture discontinuities. Steger-Warming and AUSM(Advection Upstream Splitting Method) scheme are two outstanding upwind flux splitting scheme, which are classified as FVS(Flux Vector Splitting) method. In this paper, these two schemes are applied to solve the EGLM-MHD equation with Galilean invariance. Result obtained from Orszag-Tang vortex and three-dimensional blastwave problem indicate that those two scheme are both robust and accurate. Particularly, AUSM scheme is superior to Steger-Warming scheme in divergence error control and computational speed.

Key Words MHD numerical simulation,Steger-Warming scheme,AUSM scheme,EGLM-MHD

* 国家自然科学基金项目资助（41231068,41204127）

Email:hcli@spaceweather.ac.cn

chinaXiv:201612.00195v1

0 引言

近些年来,空间天气预报由经验预报向数值预报发展的需求正变得越来越强烈。借助现代计算机技术的磁流体力学（MHD）数值模拟可以丰富、自洽的实现空间天气的数值预报。国内外学者开展了大量这方面的研究工作[1]。这些研究涵盖了日冕磁场结构[2,3]、背景太阳风结构[4]、日冕物质抛射事件[5]、太阳风磁层相互作用[6]等日-地关系链中的多个领域。尽管已经取得了一定进展，但现有的研究结果表明空间天气的数值预报方法还有很大的改进空间，如某些情况下预报精度不高、不够快捷高效等，开发高性能的磁流体力学数值模拟方法是提高空间天气数值预报研究的一个重要方面[7]。

在空间天气预报所要处理的物理问题中，一般包含有激波、接触间断等间断结构，而数值求解方法中的逆风类求解方法被认为是捕捉间断的最佳方法之一，它在计算高速流动问题时要比中心差分方法更加有效[8]。逆风类求解方法可分为 FDS（Flux Difference Splitting）方法和 FVS（Flux Vector Splitting）方法，其中 FDS 方法包括 Roe 格式[9]、HLL 格式（Harten，Lax and van Leer）[10]等，而 FVS 方法包括 Steger-Warming 格式[11]、van-Leer 格式[12]以及 AUSM 格式[13]等。

MacCormack[14]提出了一种逆风求解方法，它在不改变 MHD 方程的解的前提下，将方程由一阶非齐次变为一阶齐次，从而可以用逆风分裂方法来求解。但是，MacCormack 在对方程雅克比矩阵的逆风分裂时使用的是 Steger-Warming 方法，该方法的稳定性有所欠缺。若采用熵修正的方法来增加算法的稳定性，会因为引入较大的粘性而使计算精度降低。潘勇[15]提出了一种基于磁马赫数的雅可比矩阵分裂方法，这种分裂方法使得算法更加稳定且粘性耗散更小。

另一种重要的逆风求解方法是 AUSM 格式[13]，该方法的核心思想是把方程组的流通量分为流动项和压力项，然后根据网格界面的马赫数计算流通量。这种方法不用计算通量雅克比矩阵的特征值和特征向量，计算效率较高。

在三维 MHD 数值模拟过程中会产生磁场散度不为零的误差，它有可能使计算结果中出现非物理结构，甚至使计算崩溃。因此要特别注意如何保持磁场散度为零，消除误差[16]。磁场散度处理方法主要有以下四种：其中，CT（Constrained Transport）方法[18]需要使用交错网格，较为繁琐。Powell 提出的八波模型[19]在某些情况下会在间断附近产生不正确的结果。泊松校正法[17]需要额外增加计算步骤，MacCormack[14]在使用 Steger-Warming 格式时采用的是这种方法。广义拉格朗日乘子（Generalized Lagrangian Multiplier，简称 GLM）方法[20] 通过增加变量ψ的方式，使磁场散度误差同时被输运和耗散。Han[8]在使用 AUSM 格式时采用的是这种方法。本文在使用 Steger-Warming 和 AUSM 格式时采用扩展型广义拉格朗日乘子（Extended Generalized Lagrangian Multiplier，简称 EGLM）方法，它是 GLM 的一个变种，其在动量和磁感应方程中添加了与ψ和$\nabla\cdot\vec{B}$有关的源项。文献[21]使用 Godunov 格式计算强磁场等离子体中强间断传播问题的结果表明，EGLM 比 GLM 的性能更好。

本文使用 Steger-Warming 格式和 AUSM 格式求解了具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程，并用两个磁流体力学算例对二者进行了对比分析。本文第二章介绍了两种格式在求解 EGLM-MHD 方程时的通量计算方法、空间离散和时间推进。第三章将两种格式应用于 Orszag-Tang 涡流问题和三维爆炸波问题，并对结果进行了对比分析。第四章得出结论。

1 数值算法

1.1 控制方程

本文求解的是具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0\\
&\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t}+\nabla\cdot[\rho\vec{u}\vec{u}^T+(p+\frac{1}{2}B^2)I-\vec{B}\vec{B}^T]=-(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}\\
&\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\cdot(\vec{u}\vec{B}^T-\vec{B}\vec{u}^T+\psi I)=-(\nabla\cdot\vec{B})\vec{u}\\
&\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot[(E+p+\frac{1}{2}B^2)\vec{u}-\vec{B}(\vec{u}\cdot\vec{B})]=-(\nabla\cdot\vec{B})\vec{u}\cdot\vec{B}-\vec{B}\cdot(\nabla\psi)\\
&\frac{\partial\psi}{\partial t}+c_h^2\nabla\cdot\vec{B}=-\vec{u}\cdot(\nabla\psi)-\frac{c_h^2}{c_p^2}\psi
\end{aligned}
\quad , \tag{1}
$$

其中 ρ 是密度，$\vec{u}$ 是速度，p 是气体压强，$\vec{B}$ 是磁感应强度，ψ 是方程为保持磁场散度为零引入的新的变量，$E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{1}{2}B^2$ 是能量。

$c_h=\frac{CFL}{\Delta t_n\times\max(\frac{1}{d})}$ ，$CFL=\max[\frac{(|u_n|+c_f)\Delta t_n}{d}]$，$c_p=\sqrt{-\Delta t_n\frac{c_h^2}{\ln(c_d)}}$，d 是网格单元的大小，$c_d\in(0,1)$ 是人为选定的参数，本文算例中 Steger-Warming 格式取 c_d 为 0.9，AUSM 格式取 c_d 为 0.3。

三维 MHD 方程组(1)可以写为：

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}_t=\vec{S}\ , \tag{2}$$

其中，$\vec{S}$ 为方程组(1)右端的源项。

对上式两端在网格单元进行积分可得：

$$\frac{d\vec{U}_i}{dt}\Omega_i+\sum_{j=1}^{nface}\vec{F}_{ij}\cdot\vec{n}_{ij}|V_{ij}|=\vec{S}_i\Omega_i, \tag{3}$$

其中，Ω 为网格单元的体积，$|V|$ 为相邻网格单元交界面面积，i 为第 i 个网格单元，j 为第 i 个网格单元的第 j 个交界面，$\vec{n}$ 为网格单元交界面的单位法向向量。

方程右端源项 $\vec{S}_i$ 的离散采用有限体积法和中心格式单独计算[20]，如下所示：

$$\nabla\psi_i=\frac{1}{\Omega_i}\sum\psi_{ik}\vec{n}_{ik}|V_{ik}|, \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}_i=\frac{1}{\Omega_i}\sum B_{nik}|V_{ik}|, \tag{5}$$

其中，ψ_{ik} 和 B_{nik} 的取值如式(29)。

为了达到空间的二阶精度，本文使用了 MUSCL 方法[23]进行重构，并使用了 minmod 限制器以抑制振荡。以 x 方向为例，重构可以表达为：

$$U^{+}_{i+\frac{1}{2}} = U_i + \frac{1}{4}(1-k)\min\mathrm{mod}(\Delta_{i-\frac{1}{2}}U, b\Delta_{i+\frac{1}{2}}U) + \frac{1}{4}(1+k)\min\mathrm{mod}(\Delta_{i+\frac{1}{2}}U, b\Delta_{i-\frac{1}{2}}U), \quad (6)$$

$$U^{-}_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - \frac{1}{4}(1-k)\min\mathrm{mod}(\Delta_{i+\frac{3}{2}}U, b\Delta_{i+\frac{1}{2}}U) - \frac{1}{4}(1+k)\min\mathrm{mod}(\Delta_{i+\frac{1}{2}}U, b\Delta_{i+\frac{3}{2}}U), \quad (7)$$

其中，$\Delta_{i+\frac{1}{2}}U = U_{i+1} - U_i$，k=0，b=1.2。

本文使用二阶 Runge-Kutta 法[24]来作为时间的推进方法：

设半离散化方程为：$\frac{dU}{dt} = L_h(u)$，其中 $L_h(u) = \frac{-1}{\Omega}\sum \vec{F}_t \cdot \vec{n}|V| + \vec{S}$ 。

二阶精度时间差商格式为：

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L_h(U^n). \quad (8)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^{(1)} + U^n) + \frac{1}{2}\Delta t L_h(U^{(1)}). \quad (9)$$

1.2 Steger-Warming 格式

在直角坐标网格界面上求解通量时，三维 MHD 方程组(2)可以写为：

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

其中，方程组(2)右端源项 $\vec{S}$ 的处理见式(4)和(5)，在此不再赘述。

在用 Steger-Warming 格式计算通量时，以 x 方向为例：

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

按照使用 EGLM 方法计算通量时所一般采用的方法[21]，将方程组(11)分解为两个子方程系统 A 和 B。

子系统 A 为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p+\frac{-B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2})=0\\
&\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv-B_xB_y)=0\\
&\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw-B_xB_z)=0\\
&\frac{\partial B_x}{\partial t}=0\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uB_y-vB_x)=0\\
&\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uB_z-wB_x)=0\\
&\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}((E+p+\frac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2})u-B_x(uB_x+vB_y+wB_z))=0
\end{aligned}
\quad , \tag{12}
$$

子系统 B 为：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial \psi}{\partial t}+c_h^2\frac{\partial B_x}{\partial x}=0
\end{aligned}
\quad . \tag{13}
$$

其中子系统 A 的通量采用 Steger-Warming 格式求解如下：

子系统 A 的守恒变量为：

$$
\vec{U}=[\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad E]^T \quad . \tag{14}
$$

通量为：

$$
\vec{F}=\begin{bmatrix}
\rho u\\
\rho u^2+p+\dfrac{-B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2}\\
\rho uv-B_xB_y\\
\rho uw-B_xB_z\\
0\\
uB_y-vB_x\\
uB_z-wB_x\\
(E+p+\dfrac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2})u-B_x(uB_x+vB_y+wB_z)
\end{bmatrix}. \tag{15}
$$

MHD 方程雅克比矩阵的非齐次性导致我们无法直接对其进行逆风分裂，为此 MacCormack 在不改变原方程解的前提下，为 MHD 方程引入一个新的变量 a，并令其恒等于 1。在这样的情况下，新的守恒变量向量可以写为：

$$
\vec{U}'=[\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad E \quad a]^T . \tag{16}
$$

原通量向量则变为：

$$\vec{F}'=\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2+p+\dfrac{-B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2a} \\ \rho uv-\dfrac{B_xB_y}{a} \\ \rho uw-\dfrac{B_xB_z}{a} \\ 0 \\ uB_y-vB_x \\ uB_z-wB_x \\ (E+p+\dfrac{B_x^2+B_y^2+B_z^2}{2a})u-\dfrac{B_x}{a}(uB_x+vB_y+wB_z) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

利用变换矩阵 $S=\partial\vec{W}'/\partial\vec{U}'$ 将控制方程的自变量由守恒变量变换为原始变量，这样可以使雅克比矩阵的形式更简单，S 的具体形式见文献[19]。其中，

$$\vec{W}'=[\rho \quad u \quad v \quad w \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad p \quad a]^T, \tag{18}$$

则雅克比矩阵可以表示为：

$$A=\frac{\partial\vec{W}'}{\partial\vec{U}'}\frac{\partial\vec{F}'}{\partial\vec{U}'}\frac{\partial\vec{U}'}{\partial\vec{W}'}$$

$$=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & B_y/\rho a & B_z/\rho a & 1/\rho & -B^2/2\rho a \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -B_x/\rho a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & -uB_x/a \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -vB_x/a \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u & 0 & -wB_x/a \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & -B^2/2a^2\, u\beta+\vec{B}\cdot\vec{u}/a^2\, B_x\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中，$B^2=B_x^2+B_y^2+B_z^2$，$\beta=\gamma-1$。

矩阵 A 的左上方的 8×8 的子矩阵，和 Powell 提出的八波模型的矩阵[19]是完全一致的，令其为 A^1，矩阵 A^1 的特征值和特征向量和 Powell 矩阵的特征值和特征向量是完全一致的。A^1 经过矩阵对角化可以表示如下：

$$A^1=C^{-1}\Lambda C, \tag{20}$$

其中，C 为以 A^1 的各特征值的左特征向量为行向量的矩阵，C^{-1} 为以 A^1 的各特征值的

右特征向量为列向量的矩阵，具体形式见文献[19]。Λ 为对角矩阵，其对角元素为 A^1 的各特征值，具体形式为：

$$\Lambda = diag(u, u+v_a, u-v_a, u+c_f, u-c_f, u+c_s, u-c_s, u), \tag{21}$$

其中，v_a 为阿尔芬速度，c_f 和 c_s 分别为快磁声波速度和慢磁声波速度。

根据逆风通量的向量分裂思想，计算域中相邻的第 i 单元和第 k 单元某交界面的通量可以表示为：

$$\vec{F}' = \vec{F}_i'^{+} + \vec{F}_k'^{-}. \tag{22}$$

MacCormack 和其后的研究者对于特征值矩阵 Λ 都采用的是 Steger-Warming 分裂方法，即对于特征值 λ_i 分裂为 $\lambda_i^{\pm} = (\lambda_i \pm |\lambda_i|)/2$。这样分裂既有优点也有缺点，优点是计算简单，缺点是计算过程中会产生振荡，甚至当速度大小与特征速度大小非常接近的时候，振荡会导致计算失败。熵修正的方法可以弥补这一缺点，但是另一方面，熵修正引入了额外的人工黏性，这会导致计算精度降低。针对这一问题，本文采用了潘勇[15]的对 Steger-Warming 格式的改进方法——基于马赫数的分裂方法，马赫数 $m = u/c_f$，具体形式为：

$$\Lambda^{\pm} = \begin{bmatrix} u^{\pm} \\ (u+v_a)^{\pm} \\ (u-v_a)^{\pm} \\ (u+c_f)^{\pm} \\ (u-c_f)^{\pm} \\ (u+c_s)^{\pm} \\ (u-c_s)^{\pm} \\ u^{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m\pm1}{2}c_f \\ \frac{m\pm1}{2}c_f + \frac{1\pm m}{2}v_a \\ \frac{m\pm1}{2}c_f - \frac{1\pm m}{2}v_a \\ \frac{m\pm1}{2}c_f + \frac{1\pm m}{2}c_f \\ \frac{m\pm1}{2}c_f - \frac{1\pm m}{2}c_f \\ \frac{m\pm1}{2}c_f + \frac{1\pm m}{2}c_s \\ \frac{m\pm1}{2}c_f - \frac{1\pm m}{2}c_s \\ \frac{m\pm1}{2}c_f \end{bmatrix}. \tag{23}$$

则通量向量 $\vec{F}_i'^{+}$ 和 $\vec{F}_k'^{-}$ 可以表示为：

$$\vec{F}_i'^{+} = \begin{bmatrix} S^{-1}C^{-1}\Lambda^{+}CS & \vec{b}_1 \\ [\vec{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_i \vec{U}', \tag{24}$$

$$\vec{F}_k'^{-} = \begin{bmatrix} S^{-1}C^{-1}\Lambda^{-}CS & \vec{b}_1 \\ [\vec{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_k \vec{U}', \tag{25}$$

其中，$\vec{b}_1$ 为由矩阵 A 的最后一列的前 8 个元素组成的列向量，S 为将控制方程的自变

量由守恒变量变换为原始变量的变换矩阵，S^{-1} 为其逆矩阵，具体形式见文献[19]。

所以直角坐标系下计算域中相邻的第 i 单元和第 k 单元交界面上的对流通量的计算公式为：

$$\begin{aligned}\vec{F}_A{}' &= \vec{F}_i'^{+} + \vec{F}_k'^{-} \\ &= \left(\begin{bmatrix} S^{-1}C^{-1}\Lambda^{+}CS & \vec{b}_1 \\ [\vec{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} S^{-1}C^{-1}\Lambda^{-}CS & \vec{b}_1 \\ [\vec{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_k\right)\vec{U}' \ , \\ &= \begin{bmatrix} S^{-1}C^{-1}\Lambda^{+}CS\vec{U} & \vec{b}^{+} \\ [\vec{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} S^{-1}C^{-1}\Lambda^{-}CS\vec{U} & \vec{b}^{-} \\ [\vec{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_k\end{aligned} \tag{26}$$

其中，

$$\vec{b} = [0, n_x\frac{B^2(\beta-1)}{2a^2}, n_y\frac{B^2(\beta-1)}{2a^2}, n_z\frac{B^2(\beta-1)}{2a^2}, -u\frac{B_x}{a}, -v\frac{B_x}{a}, -w\frac{B_x}{a}, u\frac{B^2(\beta-1)}{2a^2}]^T, \tag{27}$$

其中，$\beta = \gamma - 1$。

我们对交界面 ik 上的 $\vec{b}$ 采用两侧直接取平均的方法，即令 $\vec{b}^{+} = \vec{b}^{-} = \frac{\vec{b}}{2}$,去掉上式中最后一个表征 a 为常数的方程，就得到了最终的对流通量计算公式为：

$$\vec{F}_A = (S^{-1}C^{-1}\Lambda^{+}CS)_i\vec{U}_i + (S^{-1}C^{-1}\Lambda^{+}CS)_k\vec{U}_k + \frac{1}{2}(\vec{b}_i + \vec{b}_k)\,. \tag{28}$$

至此，子系统 A 的通量求解完成。

子系统 B 的通量可由该子系统在界面上的黎曼问题的解析解求出。通过求解子系统 B，可以得到 ψ_{ik} 和 B_{xik} 的取值如下：

$$\begin{pmatrix} B_{xik} \\ \psi_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{xi} \\ \psi_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B_{xk} - B_{xi}) - \frac{1}{2c_h}(\psi_k - \psi_i) \\ \frac{1}{2}(\psi_k - \psi_i) - \frac{c_h}{2}(B_{xk} - B_{xi}) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

则在子系统 A 基础上附加通量为：

$$\vec{F}_B = [0,0,0,0,n_x\psi_{ik}, n_y\psi_{ik}, n_z\psi_{ik}, 0, c_h^2 B_{xik}]^T\,. \tag{30}$$

因此，实际计算过程中，计算域中相邻的第 i 单元和第 k 单元交界面上所求解的对流通量就变为：

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B\,. \tag{31}$$

1.3 AUSM 格式

AUSM 格式将对流项中速度项与压力项分开处理，通过定义一个适当的交界面上的速度来对对流项进行分裂处理。下面给出利用 AUSM 格式计算具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程组的相邻控制体单元交界面的对流通量的具体形式[8]：

$$\vec{F} = c_f(M_i^{+}\vec{\phi}_i + M_k^{-}\vec{\phi}_k) + (P_i^{+}\vec{P}_i + P_k^{-}\vec{P}_k) + \frac{1}{2}(\vec{\phi}_{B,i} + \vec{\phi}_{B,k})\,, \tag{32}$$

其中，

$$\vec{\phi}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u_x\\ \rho u_y\\ \rho u_z\\ B_x\\ B_y\\ B_z\\ \rho e+p_G\\ 0\end{bmatrix},\vec{P}=\begin{bmatrix}0\\ n_x p_G\\ n_y p_G\\ n_z p_G\\ -\overline{B}_f u_x\\ -\overline{B}_f u_y\\ -\overline{B}_f u_z\\ -\overline{B}_f(\vec{u}\cdot\vec{B})\\ 0\end{bmatrix},\vec{\phi}_B=\begin{bmatrix}0\\ -B_x\overline{B}_f\\ -B_y\overline{B}_f\\ -B_z\overline{B}_f\\ n_x\psi\\ n_y\psi\\ n_z\psi\\ 0\\ c_h^2 B_f\end{bmatrix}, \tag{33}$$

上述各式中，下标i和k表示来自交界面左右两侧单元的贡献，$B_f=n_xB_x+n_yB_y+n_zB_z$，n_x，n_y和n_z是交界面法向向量的三个分量，$\overline{B}_f=(B_{f,i}+B_{f,k})/2$，总压$p_G=p+\dfrac{B^2}{2}$，$M^{\pm}$和$p^{\pm}$为马赫数插值函数定义如下：

$$M^{\pm}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{4}(M\pm1)^2,|M|\le1\\ \dfrac{1}{2}(M\pm|M|),|M|>1\end{cases}\quad P^{\pm}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(M\pm1)^2(2\mp M),|M|\le1\\ \dfrac{1}{2}(1\pm sign(M)),|M|>1\end{cases}, \tag{34}$$

其中，

$$sign(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}. \tag{35}$$

选取快磁声波速度来定义马赫数如下，并以此来作为计算(34)式的马赫数：

$$M_{i,k}=\frac{u_{i,k}}{c_f}, \tag{36}$$

其中，$u_{i,k}$表示交界面左右两侧单元的声速，快磁声波速度定义为：

$$c_f=\min(c_{f,i},c_{f,k}). \tag{37}$$

2 数值算例

2.1 Orszag-Tang 涡流问题

由于 Orszag-Tang 涡流问题在涡流形成时存在多种激波的相互作用，因此经常被用来作为验证磁流体力学算法有效性的标准算例。本文计算区域为$(x,y)\in[0,2\pi]^2$，采用文献[25]的初边值条件。初值为：

$$\rho(x,y,0)=\gamma^2 \qquad p(x,y,0)=\gamma \qquad u(x,y,0)=-\sin y$$

$$v(x,y,0)=\sin x \qquad B_x(x,y,0)=-\sin y \quad B_y(x,y,0)=\sin 2x$$

其中$\gamma=5/3$，边界条件使用周期性边界条件，网格数为 200×200。

(a) (b) (c)

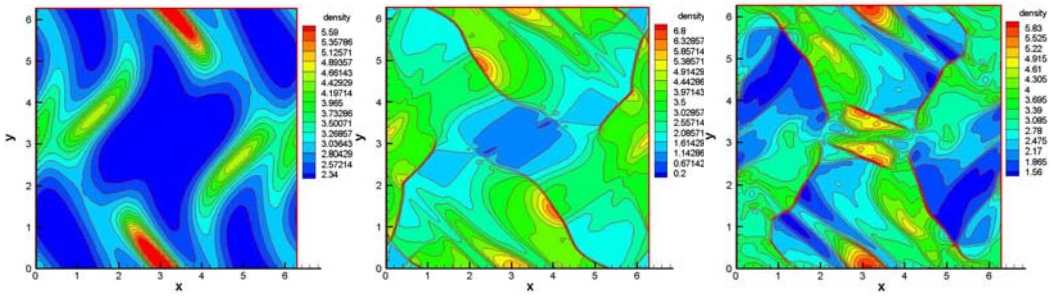

图 1 Steger-Warming 格式得到的 Orszag-Tang 涡流问题密度分布图：(a)t=0.5，(b)t=2，(c)t=3

Fig.1 Density contours of Orszag-Tang vortex problem with Steger-Warming scheme:(a) t=0.5,(b) t=2, (c)t=3

(a) (b)

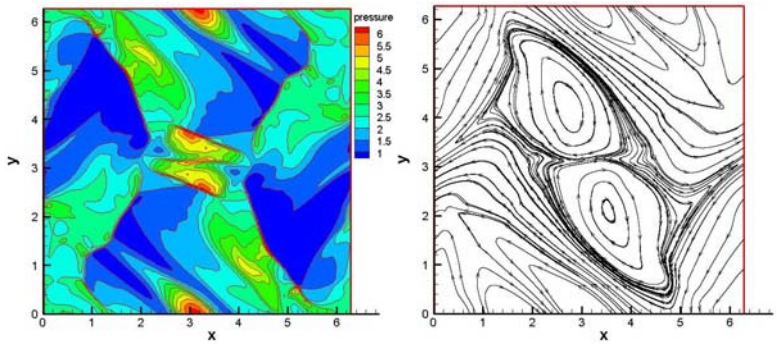

图 2 Steger-Warming 格式得到的 t=3 时刻 Orszag-Tang 涡流问题各量分布图：(a)压力，(b)磁力线

Fig.2 Orszag-Tang vortex problem with Steger-Warming scheme at t=3:(a) pressure,(b)magnetic field

(a) (b) (c)

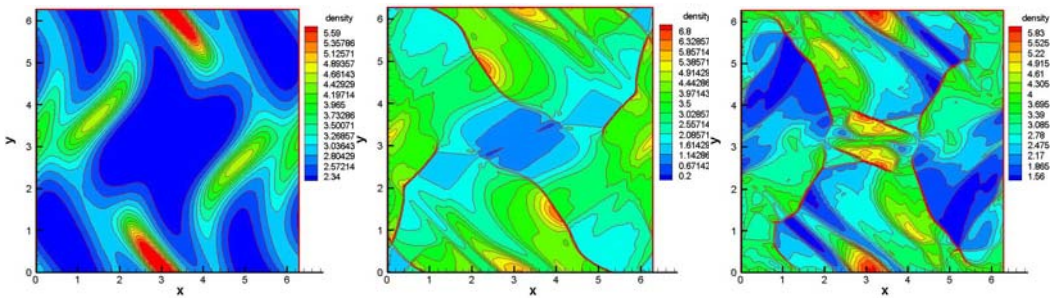

图 3 AUSM 格式得到的 Orszag-Tang 涡流问题密度分布图：(a)t=0.5，(b)t=2，(c)t=3

Fig.3 Density contours of Orszag-Tang vortex problem with AUSM scheme:(a) t=0.5,(b) t=2, (c)t=3

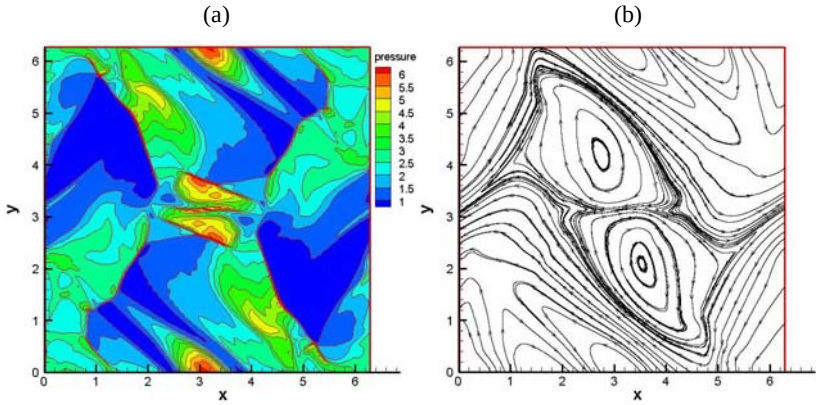

图 4 AUSM 格式得到的 t=3 时刻 Orszag-Tang 涡流问题各量分布图：(a)压力，(b)磁力线

Fig.4 Orszag-Tang vortex problem with AUSM scheme at t=3:(a) pressure,(b)magnetic field

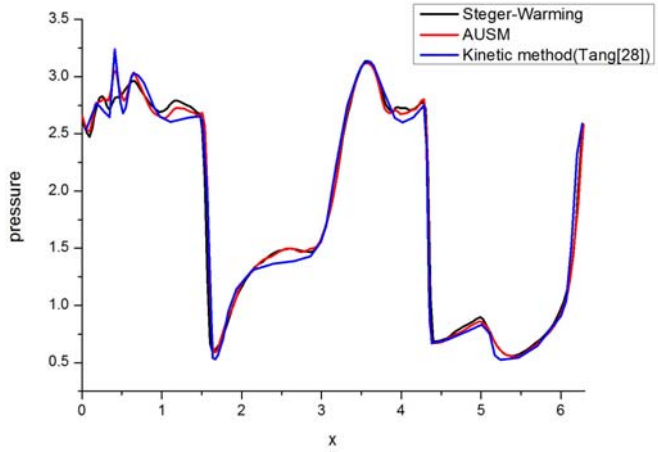

图 5 Orszag-Tang 涡流问题 t=3 时刻在线 $y = 0.625\pi$ 上压力分布图

Fig.5 The pressure distribution along the line $y = 0.625\pi$ for the Orszag-Tang vortex problem at t=3

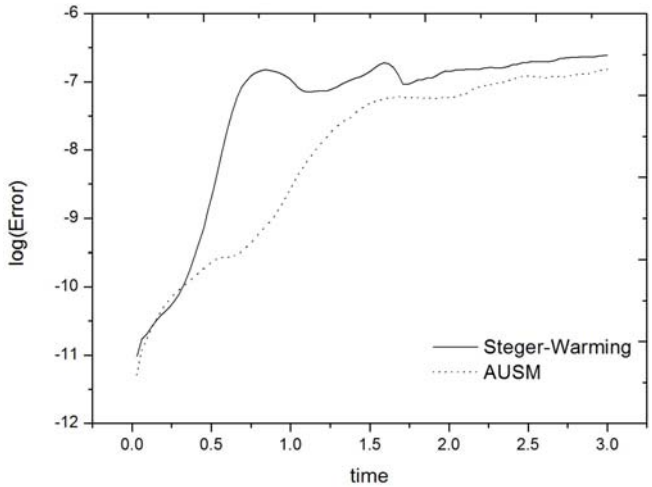

图 6 Orszag-Tang 涡流问题磁场散度误差 $\log(Error)$ 随时间的变化曲线

Fig.6 Evolutions of of magnetic field divergence error $\log(Error)$ for the Orszag-Tang vortex problem

从图 1 和图 2 以及图 3 和图 4 中可以看出，Steger-Warming 格式和 AUSM 格式都能够

计算出 Orszag-Tang 涡流问题的基本结构，并且二者的计算结果相似，与前人的结果几乎相同[26,27,28]。从图 5 两种格式得到的在线 $y=0.625\pi$ 上压力分布图可以看出，Steger-Warming 格式和 AUSM 格式的结果均与文献[28]中的 $y=0.625\pi$ 上压力分布图较为吻合。为了定量观察 EGLM 对磁场散度误差的控制效果，我们参考文献[19]计算了平均磁场散度相对误差：

$$Error(\vec{B})=\sum_{i=1}^{M}\frac{\int_{\Omega_i}\nabla\cdot\vec{B}d\Omega}{\int_{|V|_i}\left|\vec{B}\right|d|V|}\Bigg/M\,, \tag{38}$$

其中 M 为总网格数。图 6 中给出了平均磁场散度相对误差的常用对数随时间的变化。从图中可知，随着计算的进行，两种格式计算结果中的平均磁场散度误差逐渐趋于稳定，保持在 10^{-6} 以下，Steger-Warming 格式计算结果的散度误差略高于 AUSM 格式。这说明在本算例中，EGLM 方法有效的控制了磁场散度误差。本算例的程序使用 Intel Fortran 编译器，以 O2 优化选项进行编译，在配备 Intel Xeon E7450 CPU(2.4GHz 主频) 的计算机上运行。AUSM 格式在 200×200 网格下计算到 t=3 物理时刻需要 9min 的运行时间；而 Steger-Warming 格式在相同条件下计算到 t=3 物理时刻需要 86min 的运行时间。AUSM 格式的计算速度较快。这可能是因为 Steger-Warming 格式较为繁琐，包含了较多的矩阵运算，而 AUSM 格式计算步骤相对简单。

2.2 三维爆炸波问题

类似于气体爆炸波，在强磁场等离子体中心的过压区会产生磁流体爆炸波。爆炸会驱动向外的快速磁激波压缩其前面的等离子体和磁场，爆炸内部则产生稀疏的等离子体。本文的初边值条件与文献[22]相同。计算区域为$[-0.5,0.5]^3$，初始条件为：

$$\rho=1\,,\quad p=\begin{cases}10, & \sqrt{x^2+y^2+z^2}<0.1\\ 0.1, & \sqrt{x^2+y^2+z^2}\geq 0.1\end{cases}$$

$$\vec{v}=\vec{0}\,,\quad \vec{B}=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$$

其中 $\gamma=5/3$，边界条件使用自由输入输出边界条件，网格数为 100×100×100。

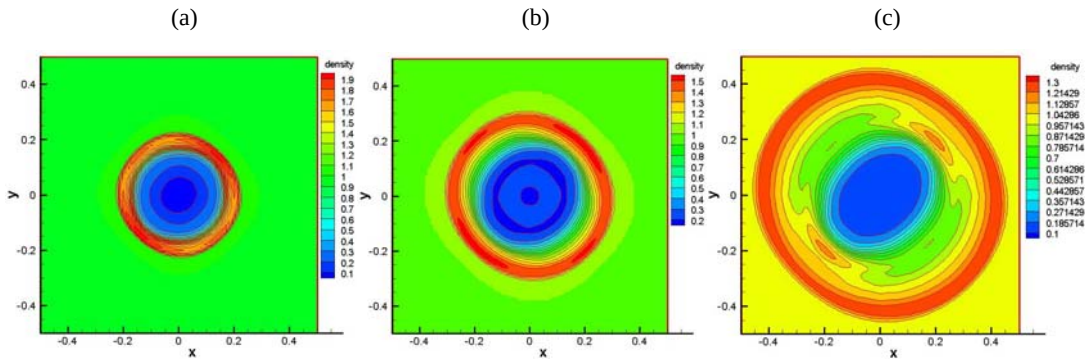

图 7 Steger-Warming 格式得到的三维爆炸波问题 z=0 平面密度分布图：(a)t=0.05，(b)t=0.1，(c)t=0.2

Fig.7 Density contours of three-dimensional blastwave problem on the plane z=0 with Steger-Warming scheme :(a)t=0.05,(b)t=0.1,(c)t=0.2

(a) (b) (c)

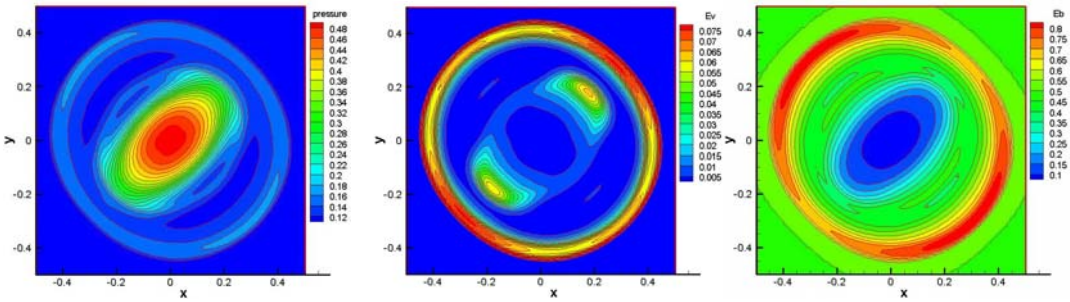

图 8 Steger-Warming 格式得到的三维爆炸波问题 t=0.2 时刻 z=0 平面各量分布图：(a)压力，(b)动能，(c)磁能

Fig.8 Contours of three-dimensional blastwave problem on the plane z=0 with Steger-Warming scheme at t=0.2:(a) pressure,(b)kinetic energy,(c)magnetic energy

(a) (b) (c)

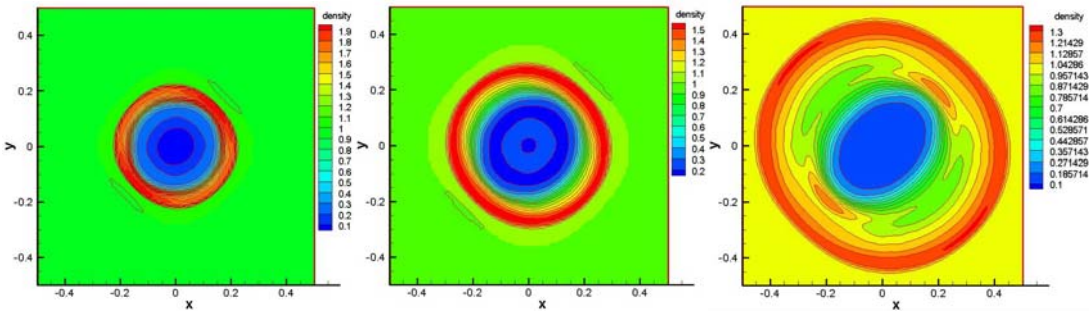

图 9 AUSM 格式得到的三维爆炸波问题 z=0 平面密度分布图：(a)t=0.05，(b)t=0.1，(c)t=0.2

Fig.9 Density contours of three-dimensional blastwave problem on the plane z=0 with AUSM scheme :(a)t=0.05,(b)t=0.1,(c)t=0.2

(a) (b) (c)

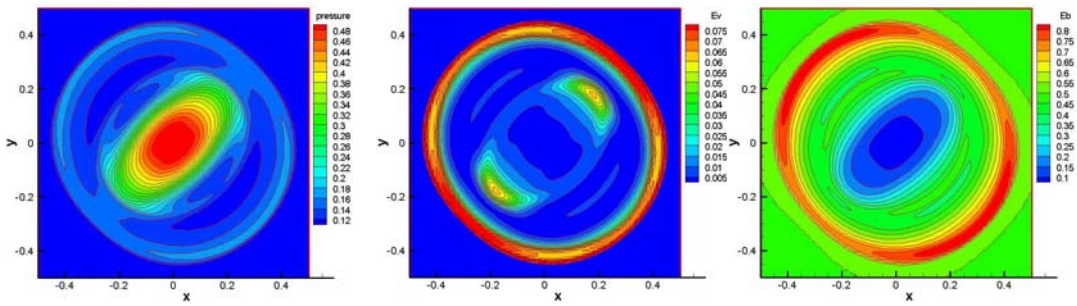

图 10 AUSM 格式得到的三维爆炸波问题 t=0.2 时刻 z=0 平面各量分布图：(a)压力，(b)动能，(c)磁能

Fig.10 Contours of three-dimensional blastwave problem on the plane z=0 with AUSM scheme at t=0.2:(a) pressure,(b)kinetic energy,(c)magnetic energy

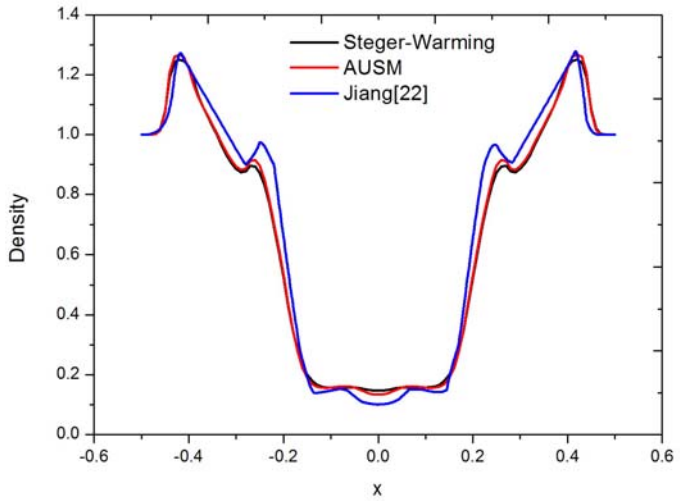

图 11 三维爆炸波问题 t=0.2 时刻爆炸中心线密度分布图

Fig.11 The density distribution along the central line for the three-dimensional blastwave problem at t=0.2

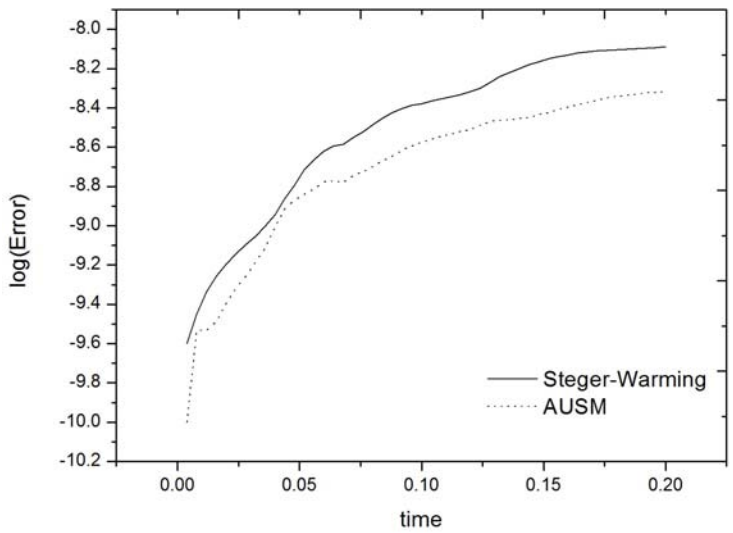

图 12 三维爆炸波问题磁场散度误差 $\log(Error)$ 随时间的变化曲线

Fig.12 Evolutions of magnetic field divergence error $\log(Error)$ for the three-dimensional blastwave problem

图 8 和图 10 可以看到的最外层的激波面是一个快激波，内部是两个气体壳，它们平行于磁场传播，包围它们的分别是一个外层慢激波和内层接触间断面，两种格式计算结果的总体结构与文献[22]基本一致。图 11 可以看到计算结果保持了高度的对称性，与文献[22]的结果差别不大。

图 12 给出了用(38)式计算的平均磁场散度误差的常用对数随时间的变化，从中可知磁场散度相对误差被控制在 10^{-8} 以下，Steger-Warming 格式计算结果的散度误差略高于 AUSM 格式。在与 2.1 节中的算例相同的运行环境下，AUSM 格式在 100×100×100 网格下计算到 t=0.2 物理时刻需要 11min 的运行时间，而 Steger-Warming 格式在相同条件下计算到 t=0.2 物理时刻需要 105min 的运行时间，AUSM 格式的计算速度快于 Steger-Warming 格式。

3 结论

本文使用 Steger-Warming 格式和 AUSM 格式求解了具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程，对 Orszag-Tang 涡流问题和三维爆炸波问题进行了数值模拟，并对二者的计算结果进行了分析。两种格式均能得到稳定精确的数值结果。Steger-Warming 格式在计算过程中产生的磁场散度误差略高于 AUSM 格式。在模拟同样的物理问题时，AUSM 格式运行花费的运行时间比 Steger-Warming 格式花费的运行时间要少，这可能是由于 Steger-Warming 格式计算较为繁琐，而 AUSM 格式计算步骤简单。

参考文献

[1]Annette Parsons, Douglas Biesecker, et al. Wang-Sheeley-Arge–Enlil Cone Model Transitions to Operations[J]. Space Weather, 2011,9(3): 420-424

[2]Riley P,Lionello R, et al. Global MHD Modeling of the Solar Corona and Inner Heliosphere for the Whole Heliosphere Interval[J]. Solar Physics, 2011, 274(1-2): 361-377

[3]Yang Liping,Feng Xueshang, et al. Time-dependent MHD modeling of the global solar corona for year 2007: Driven by daily-updated magnetic field synoptic data[J]. Journal of Geophysical Research, 2012,117(A8):101-110

[4]Feng Xueshang,Zhou Yufen, and Wu S T. A Novel Numerical Implementation for Solar Wind Modeling by the Modified Conservation Element/Solution Element Method[J]. The Astrophysical Journal, 2007, 655(2):1110–1126

[5]Forbes,Linker T G,et al.CME Theory and Models[J]. Space Science Reviews, 2006,123(1-3): 251-302

[6]Lyon,Fedder J G,et al.The Lyon-Fedder-Mobarry(LFM) global MHD magnetospheric simulation code[J].Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics,2004,66(15-16):1333-1350

[7]Feng Xueshang,Xiang Changqing,et al.Numerical study of interplanetary solar storms[J].Scientia Sinica Terrae,2013,43(6):912-933.In Chinese(冯学尚,向长青.行星际太阳风暴的数值模拟研究[J].中国科学:地球科学,2013,43(6):912-933)

[8]Sang-Hoon Han,Jeong-Il Lee,Kyu Hong Kim.Accurate and Robust Pressure Weight Advection Upstream Splitting Method for Magnetohydrodynamics Equations[J].AIAA Journal,2009,47(4): 970-981

[9]Brio M,Wu C C.An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics[J].Journal of Computational Physics,1988,75(2):400-422

[10]Janhunen P.A positive Concervative Method for Magnetohydrodynamics Based HLL and Roe Methods[J].Journal of Computational Physics,2000,160(2):649-661

[11]Steger Joseph L,Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equation with application to finite-difference methods[J]. Journal of computational physics ,1981,40(2):263-293

[12]Lin,Chao,et al.A Class of the van Leer-type Transport Schemes and its Application to the Moisture Transport in a General Circulation Model[J]. Monthly Weather Review, 1994, 122(7): 1575-1593

[13]Liou M S, Steffen C J. A new flux splitting scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1993,107(1):23-39

[14]MacCormack Robert W.Numerical Computation in Magnetofluid Dynamics[C]//Computational fluid dynamics for the 21st century.Berlin:Splinger,2001.369-384

[15]Pan Yong,Wang Jiangfeng,Wu Yizhao.A new Jacobian matrix splitting method for MHD equations Upwind scheme[J].Acta Aerodynamica Sinica,2008,26(2):249-256.In Chinese(潘勇,王

江峰,伍贻兆.一种新的用于 MHD 方程逆风格式的 Jacobian 矩阵分裂方法[J].空气动力学学报,2008,26(2):249-256)
[16]Tóth G.The ∇·B=0 constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes[J]. Journal of Computational Physics,2000,161(2):605-652
[17]Brackbill J U,Barnes D C.The effect of nonzero ∇·B on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations[J]. Journal of Computational Physics,1980,35(3):426–430
[18]Evans Charles R,Hawley John F.Simulation of magnetohydrodynamic flows-a constrained transport method[J]. The Astrophysical Journal,1988, 332(2):659–677
[19]Powell Kenneth G,Roe Philip L,et al.A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics[J].Journal of Computational Physics,1999,154(2):284-309
[20]Dedner A, Kemm F, Kroner D, et al. Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations [J]. Journal of Computational Physics,2002,175(2):645-673
[21]Mignone, Andrea, Tzeferacos,et al.A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: The CTU-GLM scheme[J].Journal of Computational Physics,2010,229(6):2117-2138
[22]Jiang Chaowei,Feng Xueshang,et al.AMR Simulations of Magnetohydrodynamic Problems by the CESE Method in Curvilinear Coordinates[J].Solar Physics,2010,267(2):463-491
[23]Zhang DeLiang. A course in computational fluid dynamics[M].Beijing:Higher Education Press, 2011.In Chinese(张德良.计算流体力学导论[M].北京:高等教育出版社,2011.)
[24]Dontchev A L,Hager William W,et al.Second-Order Runge-Kutta Approximations in Control Constrained Optical Control[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2000,38(1):202-226
[25]Zhang M,Yu S J,et al.Solving the MHD equations by the space-time Conserving Element and Solution Element method[J].Journal of Computational Physics,2006,214(2):599-617
[26]Feng Xueshang,Zhou Yufen,Hu Yanqi.A 3rd order WENO GLM-MHD scheme for magnetic reconnection[J].Chin.J.Space Sci,2006,26(1):1-7
[27]Zachary Andrew L,Andrea Malagoli,et al.A higher-order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics[J].SIAM Journal on Scientific Computing,1994,15(2):263-284
[28]Hua-Zhong Tang,Kun Xu.A High-Order Gas-Kinetic Method for Multidimensional Ideal Magnetohydrodynamics[J].Journal of Computational Physics,2000,165(1):69-88